Lament matematyka
Paul Lockhart

Muzyk budzi się ze straszliwego koszmaru. We śnie znalazł się nagle w kraju, w którym naukę muzyki uczyniono obowiązkową. „Chcemy, by nasi uczniowie stali się bardziej konkurencyjni w świecie coraz bardziej wypełnionym dźwiękiem". Do realizacji przedsięwzięcia o tak kluczowym znaczeniu włączono pedagogów, system szkolnictwa i aparat państwa. Uruchomiono projekty badawcze i nowe kierunki studiów, utworzono komitety ekspertów, podjęto decyzje – wszystko to bez udziału, choćby sugestii ze strony żadnego praktykującego muzyka lub kompozytora.

A jako, że muzycy znani są ze swego zwyczaju używania zapisu nutowego dla wyrażenia swych pomysłów, wszystkie te dziwne czarne kropki i linie muszą – uznano – tworzyć „język muzyki". Biegłość w tym języku stała się więc imperatywem edukacji. Skoro uczniowie mają uzyskać jakiekolwiek muzyczne kompetencje, byłoby doprawdy zabawne oczekiwać od nich śpiewu lub gry na instrumencie, zanim opanują podstawy muzycznej notacji i teorii! Uprawianie muzyki w postaci jej wykonywania i odbioru, nie wspominając o samodzielnym komponowaniu, uważa się za umiejętności zaawansowane, zarezerwowane dla poziomu liceum, a najczęściej – dla studiów wyższych.

Co zaś do szkół podstawowych i gimnazjów, to ich misja w tym zakresie polega na operowaniu muzycznymi symbolami zgodnie ze zbiorem podstawowych zasad: „Na lekcjach muzyki wyciągamy z tornistrów zeszyty, nauczyciel zapisuje kilka nut na tablicy, a my je przepisujemy albo na przykład transponujemy do innej tonacji. Musimy się upewnić, że klucze wiolinowe, wszystkie znaki chromatyczne i pauzy mamy zapisane prawidłowo. Nauczyciel jest drobiazgowy i czepia się, kiedy na przykład nie wypełnimy ćwierćnut całkowicie. Kiedyś mieliśmy zadanie o skali chromatycznej i zrobiłem je dobrze, ale i tak nie dostałem punktu, bo 'laski' w moich nutach były ze złej strony."

Edukatorzy dostrzegli w swej mądrości, że tego rodzaju szkolenie muzyczne da się stosować również wobec bardzo małych dzieci. W rzeczywistości uważa się dziś za zawstydzającą porażkę, kiedy trzecioklasista nie opanuje zapisu doskonałej kwinty. „Muszę znaleźć synowi korepetytora. On po prostu nie jest w stanie odrobić ani jednego zadania domowego z muzyki. Mówi, że to jest nudne. Siedzi nad zeszytem do nut i gapi się przez okno, mrucząc coś pod nosem i wymyślając głupie piosenki."

W wyższych klasach tego rodzaju napięcia rosną. Uczniowie muszą się przecież przygotować do standardowych testów i egzaminów wstępnych. Muszą brać korepetycje ze skal, tonacji, harmonii, metryki, kontrapunktu. „To bardzo dużo ciężkiej pracy, ale później w liceum i na studiach uczniowie to docenią, kiedy wreszcie będą mogli usłyszeć to wszystko." Oczywiście nie wszyscy uczniowie wybiorą tego rodzaju kariery i dalszą edukację w tym zakresie – w rzeczywistości tylko nieliczni z nich kiedykolwiek usłyszą dźwięki reprezentowane przez dobrze im znane czarne kropki. Niemniej jest bardzo istotne, by każdy członek współczesnej społeczności był w stanie rozpoznać temat fugi, niezależnie od tego, czy go kiedykolwiek usłyszy. „Szczerze mówiąc większość uczniów nie ma muzycznych talentów i słuchu. Na lekcjach siedzą znudzeni, ich umiejętności są żadne, prace domowe żenujące. Nie doceniają znaczenia muzyki, wszystko, czego chcą, to zdać muzykę przy minimalnym zaangażowaniu. Sądzę, że bywają po prostu ludzie o muzycznym usposobieniu i ludzie bez niego. Miałam kiedyś taką uczennicę – no, coś nieprawdopodobnego! Jej nuty były perfekcyjne, każda idealnie na miejscu, idealna kaligrafia, krzyżyki, bemole, pauzy: po prostu przepiękne! Będzie z niej kiedyś kawał znakomitego muzyka.”

Budząc się, zlany zimnym potem, muzyk uświadamia sobie z ulgą, że to był tylko szalony koszmar. „To jasne” – upewnia się sam przed sobą – „przecież żadne społeczeństwo nie sprowadziłoby tak pięknej, tak pełnej życia i znaczeń sztuki do równie bezmyślnego i trywialnego poziomu, żadna kultura nie była tak okrutna dla swoich dzieci, by je pozbawiać tak naturalnego i cudownego środka ekspresji. Toż to absurd!”

Równocześnie, gdzieś na drugim końcu miasta, z podobnego koszmaru budzi się z ulgą malarz…

Ku swojemu zaskoczeniu znalazłem się nagle w zwykłej szkolnej klasie. Nie było sztalug, tub z farbami – nic z tych rzeczy. „Och, nie używamy farb aż do liceum” – usłyszałem od uczniów. „W siódmej klasie głównie poznajemy kolory i narzędzia do ich nakładania”. Pokazali mi swoje karty pracy. Po jednej stronie kwadratowe próbki kolorów; po drugiej – miejsca na nazwy kolorów do wpisania. „Bardzo lubię malarstwo” – powiedział mi jeden z uczniów. „Mówią, co mam robić i ja to robię. To łatwe!”

Po lekcji rozmawiałem z nauczycielem. „Więc pańscy uczniowie w ogóle niczego nie malują?” – zapytałem. „Och, w następnej klasie zaczyna się wstępny kurs *Malowania liczbami*. To jest przygotowanie do zasadniczego *Malowania liczbami* w liceum. Będą mogli wykorzystać to, czego się tu uczymy, w sytuacjach rzeczywistego malowania. Jak moczyć pędzel w farbie, jak go wycierać – takie rzeczy, wie pan. Oczywiście bardzo uważnie przyglądamy się uzdolnieniom uczniów. Naprawdę dobrzy w malarstwie – ci, którzy na wylot znają kolory i pędzle – mogą rozpocząć malowanie odrobinę wcześniej, a niektórzy z nich wybierają nawet rozszerzony kurs *Zaawansowanej aplikacji kolorów*, co daje dodatkowe punkty przy wstępie na studia. Ale zasadniczo koncentrujemy się na stworzeniu solidnych podstaw, chcemy przekazać wiedzę o tym, na czym polega malarstwo. Tak, żeby kiedy uczniowie opuszczą szkołę i zetkną się z malowaniem w prawdziwym świecie, np. z malowaniem kuchni, wiedzieli jak to zrobić, nie obracając w ruinę całego domu.”

„Rozumiem… A te kursy *Malowania liczbami*, o których pan wspomniał?”

„Ach, tak… Obserwujemy wzrost zainteresowania. Myślę, że to z powodu rodziców, którzy chcą zapewnić dzieciom studia na odpowiednim poziomie. Mało co wygląda lepiej niż stopień z *Zaawansowanego malowania liczbami* na świadectwie.”

„Ale dlaczego uczelnie interesują się, czy student umie wypełniać ponumerowane obszary określonym kolorem?”

„Och, to oczywiście świadczy o zdolności zorganizowanego, logicznego myślenia. A jeśli przy tym student myśli o karierze w dyscyplinach wizualnych, jak moda, czy projektowanie wnętrz, to oczywiście przydadzą się mu się solidne podstawy wyniesione ze szkoły.”

„Acha… A kiedy jest czas na swobodne palowanie na czystej kanwie?”

„Pan mówi jak jeden z moich profesorów! Wciąż o ekspresji, wyrażaniu siebie, swoich uczuć i takie rzeczy – abstrakcja bez związku z rzeczywistością. Mam dyplom z malarstwa, a w życiu nie namalowałem niczego na czystym płótnie. Używam zestawów *Malowania liczbami*, które dostaję z materiałami dydaktycznymi.”

* * *

Cały nasz system kształcenia matematycznego jest niestety koszmarem tego samego rodzaju. W rzeczywistości, gdybym miał zaprojektować mechanizm spełniający jasno wyrażony cel zniszczenia naturalnej dziecięcej ciekawości, zamiłowania do poszukiwań regularności i harmonii, nie starczyłoby mi chyba wyobraźni, by wymyślić podobnie bezduszny, podobnie destrukcyjny system, jak ten, który tworzy dziś podstawę matematycznego kształcenia.

Wszyscy widzą, że coś jest nie tak. Politycy mówią „trzeba podnieść standardy". Szkoły mówią „trzeba zwiększyć wydatki i kupić sprzęt". Edukatorzy mówią jedno, nauczyciele drugie. Wszyscy się mylą. Jedynymi ludźmi, którzy rozumieją sytuację są ci, których obarczamy najbardziej, a słuchamy najrzadziej: uczniowie. Oni zaś mówią po prostu: „lekcje matematyki są głupie i nudne". I mają rację.

Matematyka i kultura

Pierwszą z rzeczy, które trzeba zrozumieć, jest, że matematyka jest sztuką. Różnica pomiędzy matematyką, a innymi sztukami, jak muzyka, czy malarstwo polega tylko na tym, że nasza kultura nie uważa matematyki za sztukę. Każdy rozumie, że poeci, malarze i muzycy tworzą dzieła sztuki, że wyrażają siebie poprzez słowa, obrazy i dźwięki. Nasze społeczeństwo jest całkiem hojne w uznawaniu artystycznego statusu: artystami są architekci, szefowie kuchni, nawet telewizyjni reżyserzy. Dlaczego nie matematycy?

Część problemu bierze się stąd, że nikt nie ma bladego pojęcia, czym matematycy się zajmują. W potocznej świadomości matematyk kojarzy się z nauką – być może wspomaga ją swoimi wzorami, albo z jakichś niejasnych powodów karmi potężne komputery olbrzymimi liczbami. Nie mamy wątpliwości, że gdyby podzielić świat na „poetyckich marzycieli" i „ludzi racjonalnych", matematycy znaleźliby się w tej drugiej grupie.

Fakty są natomiast takie, że nie istnieje nic bardziej poetyckiego, nic bardziej marzycielskiego, nic tak radykalnego, wywrotowego, psychodelicznego, niż matematyka. Matematyka jest tak oszałamiająca jak kosmologia, czy fizyka (matematycy wymyślili czarne dziury na długo zanim astronomowie zdołali je w rzeczywistości odnaleźć) – i pozwala na większą swobodę ekspresji niż poezja, sztuki plastyczne i muzyka (które bardzo mocno zależą od własności fizycznego świata). Matematyka jest najczystszą z nauk i równocześnie najbardziej niezrozumianą.

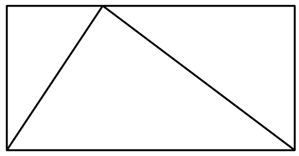
Spróbuję wyjaśnić, kim jest matematyk i czym się matematycy zajmują. Wątpię, czy zdołałbym zacząć lepiej niż z wykorzystaniem znakomitego opisu G.H. Hardy'ego:

> Matematyk, podobnie jak malarz czy poeta, jest twórcą prawidłowości. I jeśli jego wzory okazują się trwalsze niż wzory stworzone farbą, czy słowem, to dlatego, że matematyk je tworzy z *idei*.

Zatem matematycy siedzą i wymyślają wzory. Jakiego rodzaju? Z jakich idei? Idei o nosorożcach? Nie, tego rodzaju tematy zostawiamy biologom. Idei na temat języka i kultury? Nie, zazwyczaj nie tym się zajmują matematycy, bo to są rzeczy zbyt skomplikowane, jak na gusty większości z nich. Jeśli cokolwiek jest uniwersalną zasadą estetyczną w matematyce, to wyraża się ona zdaniem: *proste jest piękne*.

Matematycy lubią myśleć o najprostszych możliwych rzeczach, a najprostsze możliwe rzeczy są *wyimaginowane*.

Na przykład, gdybym był w nastroju do rozważania kształtów – a często jestem – mógłbym pomyśleć o trójkącie wpisanym w prostokątną ramkę:

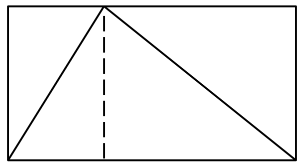


I mógłbym się teraz zastanawiać, jaką część ramki zajmuje trójkąt. Dwie trzecie na przykład? Ważne jest uświadomić sobie, że nie mam na myśli tego konkretnego szkicu trójkąta w ramce. Ani jakiegoś metalowego trójkąta, tworzącego kratownicę w konstrukcji mostu. Nie ma tu żadnego praktycznego celu. To tylko zabawa. Tym jest właśnie matematyka – rozważaniem dla zabawy, grą z wyobraźnią. Przede wszystkim pytanie, jaką część ramki zajmuje trójkąt, nie ma żadnego sensu dla żadnego rzeczywistego obiektu. Najdokładniej wykonany model trójkąta okaże się wciąż beznadziejnie skomplikowanym zbiorem chaotycznie drgających atomów; będzie w rzeczywistości zmieniał kształt z minuty na minutę. O ile tylko nie zdecydujemy się mówić o jakichś rozsądnych *przybliżeniach* pomiarów. Właśnie tu dają o sobie znać zasady estetyki. To po prostu nie byłoby wystarczająco proste, w każdej rzeczywistości problem stałby się nieznośnie skomplikowany, zależny od wielu czynników z rzeczywistego świata – a to lepiej zostawmy naukowcom. Pytanie *matematyczne* dotyczy wyimaginowanego trójkąta wewnątrz wyimaginowanej ramki. Wszystkie krawędzie są doskonałe, ponieważ chcę, żeby takie były – wolę rozważać obiekty właśnie takiego rodzaju. To jeden z charakterystycznych wątków matematyki: rzeczy są takie, jakimi chcemy, żeby były. Dysponujemy nieskończoną możliwością wyboru; nie ma tu żadnej rzeczywistości z jej ograniczeniami i komplikacjami.

Z drugiej strony jednak, skoro tylko zdecydowaliśmy się wybrać taki, a nie inny obiekt (mógłbym na przykład wybrać trójkąt symetryczny lub niesymetryczny), stworzony przez nas obiekt odtąd żyje własnym życiem i robi to, co robi, niezależnie od tego, czy nam się to podoba, czy nie. Cudowną własnością wyimaginowanych obiektów jest, że one mówią! Trójkąt zajmie określoną część prostokątnej ramki i nie mam żadnego wpływu, jaka to będzie część. Istnieje tu jakaś liczba, może dwie trzecie, a może coś innego, nie ja ją określam – mogę się tylko dowiedzieć, jaka to liczba.

Mogę się teraz bawić, wymyślając wzory i modele, pytając o ich własności i ich konsekwencje. W jaki sposób odpowiadać na tego rodzaju pytania? To zupełnie nie przypomina metody naukowej. Nie ma takich urządzeń, żadnych próbówek i sprzętu tego rodzaju, które umożliwiałyby sprawdzenie własności tego, co sobie wyobrażam. Jedynym sposobem ustalenia prawdy o wyimaginowanych tworach jest użyć imaginacji. I to właśnie jest trudne.

W przypadku trójkąta w ramce mogę zrobić coś prostego i przez to eleganckiego:



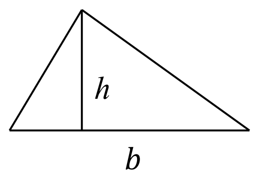
Jeśli przetnę prostokąt na dwie części, jak to zrobiłem, zobaczę, że każda z nich jest podzielona na dwie połowy przekątną utworzoną przez jeden z boków trójkąta. Zatem dokładnie taka sama przestrzeń znajduje się wewnątrz i na zewnątrz trójkąta. Co oznacza, że trójkąt zajmuje dokładnie połowę powierzchni ramki!

Właśnie tak wygląda i tak smakuje kawałek matematyki. To przykład matematycznej sztuki: zadać proste i eleganckie pytanie dotyczące wyimaginowanego obiektu i wymyślić satysfakcjonujące, piękne wyjaśnienie. Nie ma tu niczego ponad rzeczywistość czystej idei i pomysłu; to jest fascynujące, zabawne, pozbawione ograniczeń i darmowe!

Skąd wziął się pomysł? Skąd wiedziałem jak narysować pionową linię? Skąd malarz wie, gdzie przyłożyć pędzel? Natchnienie, doświadczenie, próby i błędy, ślepy traf. Na tym polega sztuka tworzenia tych maleńkich wierszy, sonetów czystego rozumu. W tej formie sztuki tkwią cudowne sprawcze moce. Związek pomiędzy trójkątem i prostokątem pozostawał zagadką, dopóki pojedyncza niewielka linia nie uczyniła go oczywistością. Nie widzieliśmy niczego i nagle zobaczyliśmy. W jakiś sposób byliśmy w stanie stworzyć z niczego tę odrobinę piękna, która uporządkowała świat i zmieniła nasz sposób widzenia rzeczy. Czy to nie definicja sztuki?

To z tego powodu tak strasznie żal patrzeć, co z matematyką robi szkoła. Cała bogata i fascynująca przygoda wyobraźni została tam zredukowana do zbioru sterylnych „faktów” do zapamiętania i procedur do przestrzegania. W miejsce naturalnego pytania o kształt, w miejsce twórczego odkrywania tajemnicy, oferujemy uczniom formułę:

Pole powierzchni trójkąta:
A = 1/2 b h



“Pole powierzchni trójkąta równa się iloczynowi połowy długości jego podstawy i jego wysokości”. Uczniowie są proszeni o zapamiętanie tej formuły i „stosowania” jej w niekończącej się serii ćwiczeń. Precz idą wyzwania, ekscytacje, nawet męka i frustracja towarzyszące twórczym aktom. Sam problem znika. Odpowiedź pojawia się gotowa razem z pytaniem – uczeń nie ma tu nic do powiedzenia i zrobienia.

Wyjaśnię, do czego tu zmierzam. Nie chodzi o wzory, czy zapamiętywanie interesujących faktów. W niektórych kontekstach obie rzeczy się przydają, podobnie jak zapamiętywanie słów poszerza słownik i daje swobodę ekspresji. Ale nie powinno chodzić również o fakt, że trójkąty zajmują połowę własnych ramek. To ta piękna idea, by przekroić konstrukcję wszystko wyjaśniającą linią, zasługuje tu na uwagę. Oraz inspiracja, która może pobudzić myślenie o rozwiązaniu innych problemów – coś, czego nigdy nie da sama informacja o polu trójkąta.

Usuwając w całości twórczy proces i pozostawiając wyłącznie jego końcowy efekt, gwarantujemy całkowity brak zaangażowania w problem i w temat. To jak powiedzieć, że Michał Anioł stworzył piękną rzeźbę, nie pokazując jej przy tym. Niby w jaki sposób miałoby mnie to inspirować? (A oczywiście rzeczywistość jest o wiele gorsza – tu przynajmniej rozumiemy, że istnieje sztuka rzeźby, choć ktoś lub coś broni nam do niej dostępu).

Koncentracja na *co* i ignorowanie *dlaczego* redukuje matematykę do zbioru pustych reguł. Sztuka nie zawiera się w „prawdzie" matematycznych faktów, ale w ich wyjaśnieniu, w argumentacji. Wyjaśnienie tworzy kontekst dla faktów, nadając im znaczenie. Matematyka to sztuka wyjaśniania. Jeśli odmówimy uczniom uczestnictwa w tej aktywności – w stawianiu własnych problemów, konstruowaniu własnych skojarzeń i dokonywaniu odkryć, jeśli odbierzemy im prawo do błędów, fałszywych hipotez, „uchronimy" ich przed twórczą frustracją, pozbawimy inspiracji, zakażemy testować, porównywać i łączyć ze sobą stworzone przez siebie wyjaśnienia i dowody – pozbawimy ich w rzeczywistości kontaktu z matematyką. Nie narzekam więc na samą obecność wzorów i praw na lekcjach matematyki – narzekam na brak samej matematyki.

Gdyby wasz nauczyciel malarstwa próbował wam wmówić, że malarstwo polega na wypełnianiu kolorami oznaczonych liczbami pól, wiedzielibyście, że coś tu jest nie tak. Kultura dostarcza w tym względzie informacji – są muzea i galerie oraz dzieła sztuki, które być może macie w domach. Malarstwo rozumiemy – wiemy, że jest to sposób wyrażania siebie. Podobnie, gdyby wasz nauczyciel przyrody próbował was przekonać, że astronomia polega na przewidywaniu czyjejś przyszłości na podstawie daty urodzin, wiedzielibyście, że po prostu oszalał – nauka zdołała przeniknąć do ludzkiej świadomości do tego stopnia, że niemal każdy słyszał dziś o atomach, o galaktykach i o prawach natury. Ale jeśli nauczyciel matematyki daje wam znać – wprost lub tylko domyślnie – że matematyka polega na definicjach, wzorach i zapamiętanych algorytmach: kto zaprzeczy tej bzdurze?

Problem z wzorcem kulturowym, to samoodradzające się monstrum: uczniowie uczą się matematyki od swoich nauczycieli, ci zaś mieli nauczycieli przed nimi, więc ten brak zrozumienia i docenienia matematyki powiela się w ciągu pokoleń w nieskończoność. Co gorsza, samo trwanie tej „pseudo-matematyki", samo akcentowanie w niej dokładnych i poprawnych, ale niezmiennie bezmyślnych manipulacji symbolami, tworzy odrębną kulturę z własnym systemem wartości. Ci, którzy okazują się dobrzy w tej dziwacznej dziedzinie, czują satysfakcję z własnego sukcesu. Ostatnią rzeczą, którą chcieliby usłyszeć, byłoby to, że matematyka jest czystą kreatywnością i wrażliwością estetyczną. Wielu maturzystów po dekadzie ciągłego powtarzania, że są urodzonymi matematykami, odkrywa nagle z goryczą, że w rzeczywistości brak im jakichkolwiek talentów, a wszystko, co potrafią, to dobrze wykonywać polecenia i podążać w wyznaczonym kierunku. Matematyka nie polega na podążaniu wyznaczonymi ścieżkami – polega na wyznaczaniu nowych ścieżek.

A nawet się jeszcze nie zająknąłem o braku krytycznego myślenia w szkole. W żadnym momencie szkolne programy nie zbliżają nawet uczniów do odkrycia tego choćby sekretu, że matematyka, jak każda literatura, jest dziełem człowieka stworzonym dla uciechy, albo że matematyczne dzieła bywają przedmiotem krytycznej oceny, że da się mieć i kształtować indywidualne matematyczne gusta. Matematyczne dzieło jest jak wiersz – wolno nam spytać, czy argumentacja przekonuje, czy ma sens. Czy jest prosta i elegancka. Czy przybliża do sedna problemu. Jasne, że w szkole nie ma i nie może być miejsca na krytycyzm – tam w ogóle nie ma przede wszystkim miejsca na sztukę, którą dałoby się krytykować!

Dlaczego nie chcemy uczyć dzieci uprawiania matematyki? Czy dlatego, że im nie ufamy i sądzimy, że to dla nich zbyt trudne? Sądzimy, że stać je na własne zdanie o Napoleonie – dlaczego nie o trójkątach? Według mnie powodem jest to, że nasza kultura nie ma pojęcia, czym matematyka w ogóle jest. Wrażenie, które ona na nas sprawia w szkole, jest takie, że chodzi o coś zimnego, wysoce technicznego, o coś, czego nikt dobrze nie umie pojąć. Jeśli naprawdę możliwe są samospełniające się proroctwa, mamy tu niewątpliwie do czynienia z jednym z nich.

Byłoby już wystarczająco źle, gdyby kultura jedynie nie rozumiała, czym jest matematyka, ale rzeczywistość jest znacznie gorsza: ludzie na ogół sądzą, że *bardzo dobrze wiedzą*, czym jest matematyka – ulegając na przykład temu wielkiemu nieporozumieniu, które każe widzieć matematykę, jako dziedzinę o ogromnej użyteczności! Samo to tworzy ogromną różnicę pomiędzy matematyką, a innymi dziedzinami sztuki. Matematyka uchodzi więc za rodzaj narzędzia dla nauki i technologii. Każdy wie, że poezję i muzykę tworzy się dla czystej radości tworzenia i odbioru, dla rozwijania i uszlachetniania ludzkiej duchowości (to zresztą dlatego poezja i muzyka do szczętu zniknęły ze szkolnych programów) – ale matematyka nie: matematyka *jest ważna i potrzebna*.

SIMPLICIO: Naprawdę zamierzasz utrzymywać, że matematyka nie oferuje społeczeństwom niczego użytecznego?

SALVIATI: Ależ nie, oczywiście. Sugeruję tylko, że fakt istnienia, przypadkiem, praktycznych zastosowań matematyki, nie oznacza jeszcze, że ona na tym właśnie polega. Muzycznymi utworami da się prowadzić armie do boju, ale to nie jest powód, dla którego ludzie piszą symfonie. Michał Anioł udekorował pewnego razu pewne sklepienie, ale założę się, że miał na myśli coś nieco bardziej wzniosłego niż pomalowanie sufitu.

SIMPLICIO: Czy nie sądzisz, że nauczanie tych użytecznych zastosowań ma sens? Czyż nie potrzebujemy księgowych i rzemieślników?

SALVIATI: A jak wielu ludzi naprawdę korzysta z tej „praktycznej matematyki", którą podobno poznają w szkole? Myślisz, że wielu rzemieślników korzysta z trygonometrii? Jak wielu dorosłych pamięta, jak się dzieli ułamki albo rozwiązuje równania kwadratowe? Oczywiście obecny program praktycznych ćwiczeń nie działa i znamy dobry powód: to jest straszliwie nudne, a i tak nikomu do niczego niepotrzebne. Naprawdę nie widzę niczego dobrego dla społeczeństwa w tym, że jego członkowie mają w głowach mgliste wspomnienia algebraicznych wzorów i geometrycznych diagramów, za to dobrze pamiętają męki z nimi związane. Jakąś korzyść przyniosłoby być może, gdyby pokazać im cokolwiek po prostu pięknego i dać im radość bycia kreatywnymi, elastycznymi myślicielami o otwartych umysłach – a tego właśnie może dostarczać prawdziwa matematyka, gdybyśmy tylko zechcieli w ogóle mieć ją w szkołach.

SIMPLICIO: Ale ludziom przydaje się choćby umiejętność bilansowania własnych wydatków, prawda?

SALVIATI: Jestem pewien, że wszyscy używamy kalkulatorów w tym celu. Dlaczegóżby nie? To jest oczywiście i łatwiejsze, i bardziej pewne. Moja teza nie polega jednak na stwierdzeniu, że obecny system jest tak rozpaczliwie zły – chodzi mi o to, że bezcenne jest to, czego w nim nie ma! Matematyki powinno się uczyć jako sztuki wartościowej samej dla siebie. Te wszystkie przyziemne „użyteczne aspekty" pojawią się w naturalny sposób jako efekt uboczny. Beethoven mógłby z łatwością skomponować dżingiel reklamowy, ale uczył się muzyki raczej po to, by tworzyć rzeczy piękne.

SIMPLICIO: Ależ nie każdy jest stworzony na artystę. Co z dziećmi, które nie są stworzone do matematyki? Gdzie jest miejsce dla nich w twoim systemie?

SALVIATI: Gdybyśmy wszyscy mieli kontakt z matematyką taką, jaką ona rzeczywiście jest, z wszystkimi radościami podejmowania jej wyzwań, z zaskakującymi i zabawnymi paradoksami, które ona niesie – myślę, że bylibyśmy świadkami radykalnej zmiany zarówno co do stosunku uczniów do matematyki, jak i w określeniu, czym są „matematyczne zdolności". Prawdopodobnie tracimy bezpowrotnie wielu zdolnych matematyków – twórczych, inteligentnych ludzi, którzy słusznie odrzucają wszystkie te bezsensowne rzeczy, bo w ich oczach one są pozbawione jakiegokolwiek znaczenia i wartości. Są po prostu zbyt mądrzy, by tracić czas na tego rodzaju bzdury.

SIMPLICIO: Czy jednak nie sądzisz, że gdyby lekcje matematyki prowadzić jak lekcje sztuki, wiele dzieci nie nauczyłoby się niczego?

SALVIATI: One się niczego nie uczą już dzisiaj! Byłoby zdecydowanie lepiej dać sobie spokój z lekcjami matematyki w ogóle, niż robić to, co robimy obecnie. Przynajmniej niektóre miałyby chociaż szansę odkrycia czegoś pięknego samodzielnie.

SIMPLICIO: A więc usunąłbyś matematykę ze szkolnych programów?

SALVIATI: Ależ ona została usunięta! Jedyne pytanie dotyczy tego, co zrobić z tą pustą skorupą, która pozostała. Oczywiście wolałbym ją zastąpić zaangażowaniem w zabawę z matematycznymi ideami.

SIMPLICIO: Ale jak wielu nauczycieli matematyki zna ją wystarczająco dobrze, żeby uczyć w ten sposób?

SALVIATI: Bardzo niewielu. A i tak zobaczyliśmy tylko czubek lodowej góry…

Matematyka w szkole

Z pewnością nie istnieje bardziej pewny sposób na zabicie fascynacji i zainteresowania tematem, niż uczynienie go przedmiotem obowiązkowego programu szkoły. Włączcie to jeszcze do systemu standardowych testów, a będzie mieć pełną gwarancję, że kadry oświatowe zdołają wyssać z niego wszelkie resztki życia. Ani władze szkół nie rozumieją, czym jest matematyka, ani nie wiedzą tego edukatorzy, autorzy podręczników, ich wydawcy – i niestety również ogromna większość nauczycieli matematyki. Skala i zakres problemów są tak wielkie, że ledwo wiem, od czego zacząć.

Zacznijmy może od klęski „reformy matematyki". Od wielu lat narastało przekonanie, że coś gnije w systemie matematycznej edukacji. Zlecano więc badania, zwoływano konferencje, powoływano niezliczone komitety nauczycieli, wydawców podręczników, edukatorów (kimkolwiek są) – wszystko dla „rozwiązania problemu". Całkiem niezależnie od łatwo czytelnych korzyści, jakie uczestniczące w reformie strony czerpały z jej kontynuowania – by wspomnieć choćby o wydawcach, dla których każda minimalna zmiana programu oznaczała możliwość sprzedaży kolejnych „nowych wydań" swych niemożliwych do czytania potworków – cały ten ruch reform zawsze kompletnie mijał się z rzeczywistością. Programu matematyki nie należy poprawiać – należy go wyrzucić.

Cała ta wrzawa i całe to przystrajanie się w nowe piórka, deliberacje, które „zagadnienia" przedstawiać i w jakim porządku, czy używać tej notacji, czy może tamtej, albo jakiego modelu *kalkulatora* używać – wszystko to jest jak przestawianie krzeseł na górnym pokładzie Titanica, na miłość Boską! Matematyka jest *muzyką rozumu*. Uprawiać matematykę, znaczy aktywnie odkrywać, snuć przypuszczenia, żyć intuicją, korzystać z inspiracji, doznawać natchnień, przeżywać zmieszania – nie dlatego, że nie widzisz w tym wszystkim sensu, ale dlatego, że sam ten sens określasz, a wciąż nie rozumiesz dokąd prowadzi tworzone przez ciebie dzieło. Uprawiać matematykę znaczy mieć przełomowy pomysł, przeżywać męki twórcze i zgoła artystyczne frustracje, czuć podziw dla obezwładniającego piękna – uprawiać matematykę znaczy żyć, do cholery. Usuńcie to wszystko z matematyki, a możecie organizować tyle konferencji, ile tylko chcecie, a wszystkie będą na nic. Operujcie ile wlezie, doktorzy: *wasz pacjent jest od dawna martwy*.

Najsmutniejszy rozdział „reformy" tworzą zaś wszystkie wysiłki, by „matematykę uczynić interesującą" albo „związaną z doświadczeniami codziennego życia dzieci". Nie ma potrzeby czynić matematyki interesującą – ona jest interesująca ponad nasze możliwości! A jej wspaniałość polega na *absolutnym braku związku* z codziennością. W tym cała zabawa!

Wszystkie te żałosne próby, by matematykę zaprezentować jako użyteczną w codziennych problemach, są nieuchronnie wymuszone i sztuczne: „Otóż, dzieci, gdybyście znały algebrę, mogłybyście dowiedzieć się, w jakim wieku jest Maria, wiedząc, że ma o dwa lata więcej niż dwa razy tyle, ile miała siedem lat temu!" (Zupełnie jakby komukolwiek zdarzyło się dysponować tak idiotycznie skleconą informacją zamiast po prostu wiekiem Marii.) Algebra nie dotyczy codziennego życia, ona dotyczy liczb i symetrii – jest celem sama dla siebie:

> Przypuśćmy, że znamy sumę i różnicę dwóch liczb. Czy w jakiś sposób mogę się dowiedzieć, co to są za liczby?

Oto prosty i elegancki problem, który nie wymaga żadnych wysiłków, by wywołać zaciekawienie. Babilończycy uwielbiali takie problemy i naszym uczniom również to się zdarza. (Mam nadzieję, że i dla was to jest ciekawe!) Nie trzeba tu żadnej ekwilibrystyki, by nadawać znaczenie matematyce. Jej znaczenie istnieje tak, jak w każdej innej sztuce: ono polega na doświadczaniu problemu.

Naprawdę myślicie, że dzieci rzeczywiście chcą czegoś związanego z codziennością? A nie czegoś właśnie niecodziennego? Poważnie twierdzicie, że dopiero coś użytecznego wywoła ich ekscytację? Ludzie lubią *fantazję* i to jest coś, czego matematyka dostarcza – odpoczynek od codzienności i jej praktycznych, użytecznych zajęć.

Podobny problem pojawia się, kiedy nauczyciele lub podręczniki próbują być sympatyczni. To ma być sposób na zwalczenie „matematycznych blokad" – tak szkoła próbuje radzić sobie z problemem, który sama tworzy. Matematyka ma być „przyjazna". Różne rzeczy wymyśla się więc, żeby ułatwić uczniom zapamiętanie tego lub owego. Np. historyjkę o panu C (ang. „circumference" – obwód), który krąży wokół pani A (ang. „area" – powierzchnia) i mówi jej, jak fajne dwa pi ma i jak jej pi są kwadratowe. (Nieprzetłumaczalne – w oryginale „how nice his two pies are", co odpowiada obwodowi $2\pi r$ i „how her pies are square", co odpowiada polu πr^2.) Albo wymyśla się inne podobne nonsensy. Ale wtedy co z prawdziwą historią? Tą o wysiłkach ludzkości, by jakoś zmierzyć krzywe, o Eudoksosie i Archimedesie, metodzie wyczerpywania, o transcendencji pi? Co jest bardziej interesujące –

mierzenie przybliżonych rozmiarów okrągłego kawałka papieru z wykorzystaniem wzoru, który ktoś podaje bez wyjaśnienia (żądając zapamiętania i stosowania w niekończących się ćwiczeniach), czy może wysłuchanie historii jednego z najpiękniejszych i najbardziej fascynujących problemów i poznanie jednej z najbardziej błyskotliwych idei w ludzkiej historii? Przecież my zabijamy wszelkie zainteresowanie kołem, na Boga!

Dlaczego nie dajemy uczniom nawet szansy, by chociaż o tych rzeczach usłyszeli, nie mówiąc już o możliwości prawdziwego uprawiania samodzielnej matematyki, proponowania własnych pomysłów, własnych ocen, krytycyzmu? Jaki inny temat relacjonuje się rutynowo bez wzmianki o jego historii, filozofii, rozwoju, wartościach estetycznych, obecnym stanie? Przy jakiej innej okazji odsuwa się w cień oryginalne źródła – przepiękne dzieła sztuki stworzone przez najwybitniejszych twórców w historii – na rzecz trzeciorzędnych podręczników i ich skarlałej treści?

Główny problem szkolnej matematyki jest taki, że w niej nie ma *problemów*. Och, oczywiście wiem, co uchodzi za problem na lekcjach matematyki – te głupkowate „ćwiczenia". „Oto pewien charakterystyczny rodzaj problemów. A oto metoda rozwiązania. Tak, to będzie na klasówce. Zróbcie ćwiczenia od 1 do 35, nieparzyste numery." Rozpaczliwie smutna metoda uczenia się matematyki: zostać tresowanym szympansem.

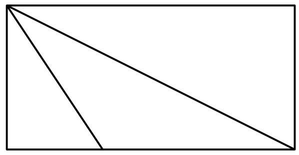
Problemem zaś z prawdziwego zdarzenia jest coś zupełnie innego. Jaka jest przekątna sześcianu? Czy liczby pierwsze ciągną się w nieskończoność? Czy nieskończoność jest liczbą? Na ile sposobów da się symetrycznie pokryć płaszczyznę? Historię matematyki wypełniają zagadnienia raczej tego rodzaju, a nie wzory i algorytmy wyrzygiwane przez nauczyciela w nieskończonym potoku wraz z ćwiczeniami zaprojektowanymi wyłącznie po to, by z algorytmów dało się w ogóle skorzystać.

Dobry problem to taki, którego rozwiązania nie znasz. Właśnie to czyni zeń łamigłówkę i daje możliwość myślenia. Nie jest czymś izolowanym, ale stanowi źródło *innych* interesujących pytań. Trójkąt zajmuje połowę swojej ramki. A co z piramidą i pudełkiem, w którym się zawiera? Czy da się to rozwiązać w podobny sposób?

Rozumiem pomysł ćwiczenia uczniów w stosowaniu określonych technik – sam to robię ze studentami. Ale nie to jest celem edukacji. Technik w matematyce, jak w każdej innej sztuce, uczymy się w kontekście. Wspaniałe problemy, ich historia, proces twórczy – wszystko to jest niezbędne. Zaprezentuj uczniom problem, pozwól im się z nim zmagać, zaakceptuj także porażkę i płynącą z niej frustrację. Zobacz, jak próbują i do czego doszli. Poczekaj aż zaczną jęczeć z wysiłku w poszukiwaniu rozwiązania i *wtedy* zasugeruj metodę. Malutki kawałek podpowiedzi. Nie za wiele.

Odłóż na bok wszelkie plany lekcji, przygotowane prezentacje, projektor ci się nie przyda, ani obrzydlistwa z kolorowych podręczników, żadne CDROM-y ani inne cyrkowe gadżety współczesnej edukacji. Po prostu zajmij się matematyką – razem z uczniami! Nikt nie marnuje czasu na lekturę podręczników na warsztatach malarstwa, nikt nie ćwiczy w nieskończoność malarskich technik. Robi się po prostu to, co naturalne – dzieci najzwyczajniej malują. Nauczyciel zaś chodzi pomiędzy sztalugami, rzucając sugestie i czasem wskazówki:

„Myślałem trochę o tym trójkącie i coś zauważyłem. Jeśli trójkąt jest mocno pochylony, to wtedy wcale nie zajmuje połowy powierzchni ramki. Proszę spojrzeć:



“Znakomicie! Argumentacja z krojeniem wzdłuż wysokości zakłada, że wierzchołek trójkąta leży ponad podstawą. W tej sytuacji potrzebujemy nowych pomysłów.”

“Powinienem spróbować przekroić to inaczej?”

“Zdecydowanie. Próbuj wszystkiego. Daj mi znać, co ustalisz!”

Jak zatem uczyć dzieci matematyki? Wybierając obchodzące je i naturalne problemy pasujące do ich gustów, osobowości i doświadczenia. Dając im czas na własne odkrycia, na formułowanie własnych uogólnień. Pomagając im doskonalić własną argumentację i tworząc atmosferę zdrowego, żywego krytycyzmu. Będąc elastycznym i otwartym na nagłe zmiany tematów, do których może zaprowadzić ciekawość dzieci. Innymi słowy chodzi o uczciwą intelektualną relację zarówno z dziećmi, jak z przedmiotem, o który chodzi.

Oczywiście postuluję niemożliwe. Z wielu powodów niemożliwe. Odkładając nawet na bok fakt, że ogólnokrajowe jednolite programy kształcenia i systemy standardowych testów wykluczają autonomie nauczycieli w tym zakresie, bardzo wątpię, by większość nauczycieli naprawdę miała ochotę na tak zaangażowane relacje z uczniami. To wymaga zbyt wielkiej wrażliwości i odpowiedzialności – to po prostu zbyt wiele pracy!

O wiele łatwiej jest być biernym kanałem transmisyjnym „materiałów” jakiegoś wydawcy i realizować instrukcje jak z butelki szamponu „wykład, test, powtórka”, niż zastanawiać się głęboko nad znaczeniem proponowanego dzieciom zagadnienia i tym, w jaki sposób najlepiej i najuczciwiej przekazać to znaczenie uczniom. Skłania się nas, byśmy się zrzekli trudnego zadania podejmowania własnych decyzji na podstawie własnej wiedzy i sumienia i byśmy „realizowali program”. To po prostu ścieżka najmniejszego oporu, tu nawet nie trzeba korupcji:

WYDAWCY PODRĘCZNIKÓW : NAUCZYCIELE:

A) firmy farmaceutyczne : lekarze
B) wydawnictwa muzyczne : disk jockey’e
C) korporacje : parlamentarzyści
D) wszyscy powyżsi

Kłopot w tym, że matematyka, podobnie jak malarstwo i poezja, to *ciężka, kreatywna praca*. Bardzo trudno się tego uczy. Matematyka to powolny proces kontemplacji. Trzeba czasu, by powstało dzieło sztuki i trzeba zdolnego nauczyciela, który by umiał je rozpoznać. Jest oczywiście o wiele łatwiej przekazać zestaw prostych reguł, niż być przewodnikiem początkującego artysty, tak jak łatwiej jest napisać instrukcję obsługi magnetowidu niż książkę prezentującą własny punkt widzenia.

Matematyka jest sztuką, a sztuki powinni uczyć artyści albo przynajmniej ludzie na sztukę wrażliwi i zdolni ją rozpoznać. Nie trzeba uczyć się muzyki od zawodowego kompozytora, ale czy ktokolwiek chciałby, żeby jego albo dziecka nauczycielem muzyki został ktoś, kto nigdy na niczym nawet nie zagrał i nigdy nie słuchał żadnego utworu? Czy ktokolwiek zaakceptowałby nauczyciela sztuki, który nie miał w ręku ołówka i nie postawił nogi w muzeum? Dlaczego zatem akceptujemy nauczycieli matematyki, którzy nigdy nie stworzyli niczego samodzielnie, nie mają pojęcia o historii i filozofii tej twórczości, o jej najnowszych osiągnięciach, nie wiedzą niczego ponad to, co każe im się przekazać nieszczęsnym uczniom? Co to są za nauczyciele? Jak ktokolwiek może uczyć czegoś, czego sam nigdy nie robił? Nie umiem tańczyć, dlatego nie przyszłoby mi na myśl, że mogę udzielać lekcji tańca (mógłbym spróbować, ale to nie byłoby ładne). Różnica polega na tym, że ja *wiem*, iż tańczyć nie umiem. Nie ma nikogo, kto by mi powtarzał, że jestem świetny w tańcu tylko dlatego, że znam związaną z tańcem terminologię.

Nie twierdzę, że nauczyciel matematyki musi koniecznie być zawodowym matematykiem – nic z tych rzeczy. Ale czyż nie powinien przynajmniej rozumieć, czym jest matematyka, być w niej przyzwoicie dobry i lubić ją choć trochę?

Jeśli nauczanie zredukujemy do transmisji danych, jeśli ono nie będzie dzieleniem się fascynacją i zadziwieniem, jeśli sami nauczyciele będą wyłącznie biernymi odbiorcami informacji, a nie twórcami nowych idei, co dobrego może z tego wynikać dla uczniów, jaka nadzieja? Jeśli dodawanie ułamków w oczach nauczyciela jest arbitralnym zestawem reguł, a nie rezultatem twórczego procesu, skutkiem estetycznych wyborów i gustów, to *oczywiście* stanie się tym samym dla biednych uczniów.

Nauczanie nie jest informowaniem. Jest uczciwym intelektualnie traktowaniem uczniów. Nie wymaga metod, narzędzi, treningu. Wyłącznie zdolności bycia prawdziwym. Jeśli nie umiesz być prawdziwym, nie masz prawa stawiać się ponad niewinnymi dziećmi.

W szczególności *nie da się uczyć nauczania*. Szkoły pedagogiczne to kompletna bzdura. No, da się pomyśleć kurs dotyczący rozwoju we wczesnym dzieciństwie, czy czegokolwiek w tym stylu; da się nauczyć „efektywnego" korzystania z tablicy lub przygotowania dobrze zorganizowanego „planu lekcji" (co, przy okazji, upewnia, że lekcja zostanie *zaplanowana* i będzie wobec tego fałszywa); ale nie da się zostać prawdziwym nauczycielem, nie będąc przy tym prawdziwie sobą. Uczyć znaczy być otwartym i uczciwym, oznacza zdolność dzielenia się fascynacjami i radością uczenia się. Bez tego żadne dyplomy nie pomogą, a kiedy się to ma, dyplomy są zbędne.

To całkiem proste. Uczniowie to nie kosmici. Reagują na piękno i harmonię, są ciekawi świata, jak każdy. Wystarczy z nimi rozmawiać. I, co ważniejsze, słuchać ich!

SIMPLICIO: Dobrze, rozumiem, że matematyka jest sztuką i że błędem jest traktowanie jej w szkole w inny sposób. Czy jednak nie byłoby zbytnią ekstrawagancją oczekiwać takiego podejścia od systemu edukacji? Nie zamierzamy przecież masowo kształcić filozofów, oczekujemy zaledwie podstawowych kompetencji matematycznych, by dać uczniom możliwość funkcjonowania w społeczeństwie.

SALVIATI: Nieprawda! Szkolna matematyka dotyczy wielu rzeczy, które nie mają żadnego związku z tymi postulatami – weźmy choćby algebrę, czy trygonometrię. One nie mają żadnego związku z codziennością. A skoro te rzeczy stanowią część podstawowego wykształcenia wszystkich uczniów, sugeruję jedynie, żeby to robić w naturalny sposób. A przy tym, jak mówiłem, fakt, że tego rodzaju tematy miewają przyziemne zastosowania praktyczne, nie oznacza koniecznie, że właśnie na tym mamy się koncentrować w szkole. To, że trzeba umieć czytać, żeby móc wypełnić deklarację podatkową, nie oznacza przecież, że czytania uczymy właśnie w tym celu. Raczej chodzi o cel cokolwiek wyższy: o zapewnienie uczniom dostępu do pięknych i ważnych idei. To byłoby nie tylko okrutne, gdybyśmy uczyli czytania w ten sposób – ćwicząc czytanie faktur i wypełnianie deklaracji podatkowych – to byłoby po prostu nieskuteczne! Uczymy się tego, co interesuje nas dzisiaj, a nie tego, co nam się przyda jutro. A właśnie tak traktujemy matematykę w szkole.

SIMPLICIO: Dobrze, ale trzecioklasista powinien umieć liczyć, prawda?

SALVIATI: Niby dlaczego właściwie? Naprawdę chcesz ćwiczyć go w liczeniu, ile to 427 plus 389? Nie wydaje się, by wielu ośmiolatków było tego ciekawych. Większość dorosłych nie rozumie w pełni konstrukcji dziesiętnego systemu pozycyjnego, a od trzecioklasisty oczekujemy, że będzie ją rozumiał. Po co miałby? Po prostu za wcześnie na tego rodzaju techniczne ćwiczenia. Da się to zrobić, oczywiście, ale sądzę, że to wyrządza więcej szkód niż korzyści. O wiele lepiej byłoby poczekać, aż ciekawość liczb zjawi się w naturalny sposób.

SIMPLICIO: Czym w takim razie zajmować się w szkole do tego czasu?

SALVIATI: Grami i zabawą! Szachami, go, hexem, czymkolwiek. Improwizowanymi grami. Łamigłówkami. Układankami. Aranżowanymi sytuacjami, w których dedukcyjne myślenie jest niezbędne. Nie przejmuj się formalną notacją i techniką – pomóż uczniom stać się aktywnymi myślicielami.

SIMPLICIO: To ogromne ryzyko. Co jeśli nasi uczniowie nie nauczą się dodawać i odejmować?

SALVIATI: Myślę, że o wiele bardziej ryzykujemy, tworząc szkoły nie dające szans jakiejkolwiek twórczości, w których rolą uczniów jest zapamiętywanie dat, wzorów i słówek i wylewanie ich z siebie w czasie standardowych testów „przygotowujących dzisiaj siłę roboczą jutra"!

SIMPLICIO: Z pewnością istnieje jednak taki zestaw matematycznych faktów, które powinien znać każdy wykształcony człowiek.

SALVIATI: Oczywiście, a najistotniejszym z nich jest, że matematyka jest sztuką, którą ludzie uprawiają dla przyjemności! W porządku, byłoby miło, gdyby ludzie znali kilka podstawowych faktów o liczbach i kształtach, ale to się nie stanie w wyniku ćwiczeń pamięciowych testów. Uczysz się czegoś, robiąc to po prostu, a pamiętasz to, co ma dla ciebie znaczenie. Wychowaliśmy miliony ludzi z wdrukowanym w mózgi wzorem „minus b plus-minus pierwiastek z b kwadrat minus 4ac przez 2a" i niemających bladego pojęcia, co to właściwie znaczy. Powód jest wciąż ten sam – nie dano im szansy na to, by którąkolwiek z tych rzeczy odkryli lub wynaleźli z własnej potrzeby. Nigdy nie zdarzył im się angażujący ich problem, nad którym musieliby łamać sobie głowę. Nikt nigdy nie opowiadał im o babilońskich problemach matematycznych, o papirusie Rhinda, Liber Abaci, Ars Magna. Co ważniejsze, nie mieli szans za zaciekawienie pytaniem – odpowiedź poznali zanim zdążyli zapytać.

SIMPLICIO: Nie mamy czasu, by każdy uczeń odkrywał matematykę dla siebie. Trzeba było stuleci zanim odkryto twierdzenie Pitagorasa. Jak możesz oczekiwać, by przeciętne dziecko odkryło je samo?

SALVIATI: Nie oczekuję. Skarżę się na kompletną nieobecność własnych zmagań z tajemnicą, na nieobecność sztuki, historii, filozofii, na brak kontekstu i perspektywy w programach matematyki. To nie oznacza, że np. notacja, specyficzne techniki i systematyczne poszerzanie bazy wiedzy nie mają znaczenia. Oczywiście mają. Potrzeba nam obu tych rzeczy. Jeśli sprzeciwiam się wychyleniu wahadła w jedną stronę, to wcale nie znaczy, że chcę je przechylić na drugą. Jest jednak faktem, że ludzie uczą się lepiej, jeśli się angażują w twórczy proces i coś robią. Rzeczywiste zamiłowanie do poezji nie bierze się z nauki wierszy na pamięć, lepiej spróbować napisać własny wiersz.

SIMPLICIO: Dobrze, ale zanim go napiszesz, musisz znać choćby alfabet. Cały proces od czegoś musi się zacząć. Musisz umieć chodzić zanim zaczniesz biegać.

SALVIATI: Niezupełnie – potrzebny jest raczej *cel*, do którego *chciałbyś* pobiec. Dzieci mogą pisać wiersze i opowiadania, *kiedy* uczą się pisać. Opowiadanie sześciolatka jest cudowną rzeczą, a błędy ortograficzne nie ujmują tej cudowności niczego. Nawet bardzo małe dzieci mogą układać piosenki, nie mając pojęcia, w jakiej tonacji i metryce to robią.

SIMPLICIO: Ale matematyka to chyba nie to samo? Czy ona sama nie jest przypadkiem językiem z własnymi regułami, własną symboliką, którą trzeba poznać zanim zaczniemy jej używać?

SALVIATI: Żadną miarą. Matematyka to nie język, to przygoda. Czy muzycy mówią innym językiem tylko dlatego, że postanowili skracać swoje pomysły zapisem posługującym się zestawem czarnych kropek? Nawet jeśli, najwyraźniej nie jest to przeszkodą dla bobasa i jego dziecięcych piosenek maluszka. Owszem, matematyka dorobiła się własnego języka w ciągu stuleci, ale on nie ma żadnego zasadniczego znaczenia. Matematykę na ogół uprawia się z przyjacielem przy kawie i jakichś szkicach bazgranych na serwetce. Matematyka dotyczy i zawsze dotyczyła idei, a wartościowa idea jest zawsze czymś znacznie więcej niż symbolika użyta do jej zapisu. Jak to kiedyś powiedział Gauss, „trzeba nam pojęć, nie sposobów ich zapisywania" [gra słów nieprzetłumaczalna z angielskiej „we need notions not notations"].

SIMPLICIO: Ale czyż nie o to właśnie chodzi w matematyce, by rozwijać myślenie bardziej precyzyjne i logiczne, by rozwijać w uczniach „zdolność rozumowania ilościowego"? Czyż wszystkie te definicje i wzory nie wyostrzają myślenia?

SALVIATI: Nie, nie wyostrzają. Jeśli już, obecny system przynosi odwrotny efekt i raczej ogłupia. Ostrość widzenia bierze się z rozwiązywania problemów, a nie z bycia informowanym, jak je rozwiązywać.

SIMPLICIO: Jasne. Ale co z tymi, którzy wybiorą dla siebie karierę w inżynierii lub naukach przyrodniczych? Czy oni przypadkiem nie potrzebują właśnie takiego wykształcenia, jak je określa program szkoły? Czyż nie dlatego w ten sposób ten program jest skonstruowany?

SALVIATI: A ilu spośród uczestników lekcji literatury zostanie któregoś dnia pisarzami? To nie z tego powodu uczymy literatury i nie z tego powodu dzieci chodzą na te lekcje. Uczymy, by oświecić wszystkich, a nie by wyćwiczyć przyszłych profesjonalistów. Tak czy owak, najbardziej cenną umiejętnością naukowca i inżyniera jest zdolność samodzielnego i twórczego myślenia. Ostatnie, czego on potrzebuje, to być *wyćwiczonym*.

Program szkolnej matematyki

Najgorsze w sposobie uczenia matematyki w szkole jest nie to, czego brakuje – czyli samej matematyki uprawianej na lekcjach – ale to, co umieszcza się tam w zamian: ów stos destrukcyjnej dezinformacji znany jako „program nauczania matematyki". Czas przyjrzeć się bliżej temu, z czym konfrontuje się uczniów, nazywając to matematyką, i w jaki sposób uczniów to okalecza.

Najbardziej uderzającą cechą programu jest jego sztywność. Dotyczy szczególnie starszych klas. Ze szkoły na szkołę, z miasta na miasto, ze stanu na stan, dokładnie te same rzeczy są w ten sam sposób omawiane na identycznie wyglądających lekcjach następujących po sobie w tym samym porządku. Dalecy od oburzenia tym orwellowskim zgoła podejściem, w większości akceptujemy ów „standardowy model" programu, jako synonim samej matematyki.

Jest to blisko związane z czymś, co nazywam „mitem drabiny" – poglądem, że matematykę da się i powinno się organizować w sekwencję „tematów", z których każdy w jakiś sposób jest bardziej zaawansowany, albo „wyższy" od poprzedniego. Jednym z efektów jest rodzaj *wyścigu* w szkole – niektóry uczniowie są „z przodu", a część rodziców martwi się, że ich dzieci „nie nadążają". Dokąd dokładnie zmierza ów wyścig. Co czeka na mecie? To smutny wyścig donikąd. Na mecie nie ma żadnej edukacji matematycznej, oszukano was i nawet o tym nie wiecie.

Prawdziwej matematyki nie da się dostarczyć w pudełku – nie istnieje nic takiego jak *Algebra II*. Problemy prowadzą dokąd prowadzą i dokąd zechcesz być doprowadzony. *Sztuka to nie wyścig*. Mit drabiny jest fałszywym obrazem rzeczy, a tradycyjny, oficjalny program matematyki utrwala go, skoro nauczyciel matematyki też go kiedyś przeszedł i nie wyobraża sobie matematyki jako organicznej całości. Mamy w rezultacie do czynienia z programem matematyki bez historycznej perspektywy, bez tematycznej spójności, bez filozoficznych konsekwencji, z dziurawą kolekcją pomieszanych tematów i technik, które łączy ze sobą jedynie domniemana łatwość zredukowania ich do jednoznacznie określonych procedur i ich kolejnych, prostych kroków.

W miejsce eksploracji i odkryć, mamy więc reguły i algorytmy. Nie słyszymy o uczniach, którzy powiedzieliby „Chciałem sprawdzić, jaki sens miałoby podnieść liczbę do ujemnej potęgi i okazało się, że jeśli uznać, że taka potęga oznacza odwrotność, to pojawia się fajna regularność". Zamiast tego mamy podręczniki i nauczycieli sucho oznajmiających „prawo ujemnego wykładnika" jako fakt dowiedziony bez wzmianki o estetyce zawartej w tym wyborze i bez zająknięcia się o tym, że właśnie z faktem wyboru mamy tu do czynienia.

W miejsce problemów, które coś znaczą i mogą prowadzić do syntezy różnych idei, do odkrycia białych plam na mapie, do poczucia harmonii i jedności w matematyce, mamy w ten sposób do czynienia wyłącznie z nudnymi, przykrymi, powtarzanymi w nadmiarze ćwiczeniami charakterystycznymi dla tej jednej techniki, która akurat jest przedmiotem lekcji i tak oderwanymi od matematyki jako całości, że ani uczniowie, ani ich nauczyciele nie mają w ogóle pojęcia, skąd się to w ogóle wzięło w matematyce i po co właściwie.

W miejsce naturalnego kontekstu, w którym uczniowie sami decydują, co mają znaczyć ich własne słowa i jakie pojęcia chcieliby nimi wyrazić, mamy do czynienia z niekończącą się sekwencją niewyjaśnionych w żaden sposób „definicji", które trzeba po prostu przyjąć. W programie dominuje obsesja na punkcie żargonu i nomenklatury, najwyraźniej w tym jedynie celu, by wyposażyć nauczycieli w łatwe kryteria oceny testów. Żaden matematyk na świecie nie zawraca sobie głowy nonsensownym rozróżnieniem pomiędzy 2 ½ – co w szkole nazywa się „liczbą mieszaną" – a 5/2, zwanymi z kolei „ułamkiem niewłaściwym". To dokładnie te same liczby, mające identyczne własności. Kto poza uczniami czwartych klas używa w ogóle tego rodzaju określeń?

Oczywiście nieporównanie łatwiej jest sprawdzać znajomość podobnie nonsensownych definicji niż inspirować uczniów do stworzenia czegoś pięknego i nadania temu własnych znaczeń. Nawet jeśli się zgodzimy, że jakiś wspólny słownik pojęć i definicji ma wartość – akurat te definicje nie mają żadnej. Jakie to smutne widzieć piątoklasistę zmuszanego do używania nazwy „czworobok" zamiast np. „kształt o czterech krawędziach", podczas gdy nikt nie proponuje mu pojęć takich jak „założenie" albo „kontrprzykład". Licealiści poznają definicję funkcji secans, która jest odwrotnością cosinusa (definicja o doniosłości intelektualnej podobnej do tej, która pozwala Amerykanom pisać „&" zamiast „and"). Ten akurat skrót i ta definicja jest ledwie pozostałością z piętnastowiecznych tablic nawigacyjnych i uchował się do dziś (podczas, gdy inne, jak „versinus", uległy zapomnieniu) – co jest historycznym przypadkiem pozbawionym jakiegokolwiek znaczenia w czasach, w których szybkie i precyzyjne obliczanie pozycji statku nie jest już żadnym problemem. W podobny sposób zaśmiecamy lekcje matematyki nomenklaturą dla niej samej.

W praktyce więc program matematyki okazuje się nie tyle sekwencją tematów, co raczej sekwencją notacji. Matematyka jawi się jako sekretna lista tajemniczych symboli i reguł ich stosowania. Maluchom daje się „+" oraz „÷". Dopiero później zasługują na „√" oraz „*x*" i „*y*", i alchemię nawiasów. Wreszcie przychodzi czas na indoktrynację z użyciem „*sin*", „*log*", „*f(x)*", ale jeśli zbiorą dobrą opinię, to nawet „*d*" i „∫". Wszystko to bez żadnego pojedynczego doświadczenia w matematycznej twórczości.

Ten program jest tak niezmienny i tak szczegółowy, że nauczyciele i autorzy podręczników umieją z łatwością przewidzieć, na całe lata do przodu, co dokładnie będą robić uczniowie z precyzją co do strony w podręczniku. Nie jest niczym wyjątkowym zastać uczniów w drugim roku zajęć z algebry nad obliczaniem wartości $[\, f(x + h) - f(x)\,] / h$ dla różnych funkcji f – tak, że gdy przyjdzie czas na rachunek różniczkowy i całkowy, będą to mogli „zobaczyć" z łatwością. Naturalnie nie następuje ani żadna motywacja, ani nawet wyjaśnienie, czemu to mają służyć te niekończące się wprawki w obliczeniach wyrażeń wyglądających na dobrane całkowicie przypadkowo. Jestem pewien, że wielu nauczycieli próbuje uczniom wyjaśniać przyszły sens ich dzisiejszej katorgi w przekonaniu, że sprawiają w ten sposób przysługę uczniom, ale prawda jest taka, że dla uczniów to jest po prostu jeszcze jeden nudny dział matematyki, przez który trzeba przejść – trudno. „Co ja właściwie robię i po co? Mam podstawić do wzoru? Tak – nie marudź, tylko podstawiaj."

Inny przykład to ćwiczenie uczniów w wyrażeniach o niepotrzebnie skomplikowanej formie wyłącznie dlatego, że w jakiejś, bliżej nieokreślonej przyszłości, ta forma ma nabrać znaczenia. Czy jakikolwiek gimnazjalny nauczyciel algebry ma pojęcie, po co właściwie oczekuje od uczniów, by proste zdanie o tym, że „liczba x leży pomiędzy 3 a 7" zapisywać koniecznie jako $|x-5|<2$? Czy ci wszyscy niedouczeni autorzy podręczników naprawdę wierzą, że przygotują w ten sposób uczniów na przyszłe (i o lata odległe) spotkanie z geometrią wielowymiarową i abstrakcyjnymi przestrzeniami metrycznymi? Bardzo wątpię. Sądzę, że raczej ordynarnie przepisują od siebie nawzajem, dekada po dekadzie, pokolenie po pokoleniu, zaledwie zmieniając krój czcionki i używając kolorów, promieniując dumą, ilekroć szkoły zatwierdzą ich dzieła jako swój obowiązujący podręcznik.

Matematyka rozważa problemy i to na nich musi się koncentrować matematyczne życie uczniów. Jakkolwiek to męczące i czasem frustrujące, uczniowie i ich nauczyciele powinni być stale zaangażowani w rozwiązywanie problemów – mając pomysły lub cierpiąc na ich brak, konstruując przykłady i kontrprzykłady, opracowując argumenty i krytykując się nawzajem. Specyficzne techniki i metody pojawią się w naturalnym biegu tego procesu: nie będą wyizolowane, ale organicznie związane jako naturalny rezultat problemu, z którego się zrodziły.

Nauczyciele angielskiego wiedzą dobrze, że zapis i wymowę rozwija się najlepiej w trakcie pisania i czytania. Nauczyciele historii wiedzą, że nazwiska i daty nic nie znaczą bez opowieści o wydarzeniach. Dlaczego więc matematycy utkwili w dziewiętnastym wieku? Porównajcie własne doświadczenie nauki algebry z wspomnieniem Bertranda Russella:

> „Zmuszono mnie do nauki na pamięć: ‘Kwadrat sumy dwóch liczb jest równy sumie ich kwadratów powiększonej o ich podwojony iloczyn’. Nie miałem bladego wyobrażenia, co to w ogóle znaczy, a kiedy nie umiałem zapamiętać słów, nauczyciel walił mnie książką po głowie, co jednak w żaden sposób nie wzmagało mojego intelektu na tyle, bym był w stanie je zapamiętać.”

Czy dzisiaj jest inaczej?

SIMPLICIO: To nie fair. Z pewnością metody nauczania zmieniły się od tamtych czasów.

SALVIATI: Masz raczej na myśli metody ćwiczenia uczniów. Nauczanie to skomplikowana międzyludzka relacja – a ona nie wymaga metod. Albo raczej, powiedziałbym, jeśli potrzebujesz metod, jesteś prawdopodobnie kiepskim nauczycielem. Jeśli nie czujesz własnego przedmiotu wystarczająco dobrze, by móc o nim mówić własnym językiem, w naturalny sposób spontanicznie, to co właściwie z niego rozumiesz? Skoro zaś mowa o dziewiętnastym wieku, w którym utkwiliśmy – czy nie szokuje cię, do jakiego stopnia sam program utkwił w wieku siedemnastym? Pomyśleć o wszystkich tych wspaniałych odkryciach i zasadniczych przewrotach, których dokonano w matematyce w ciągu ostatnich trzech stuleci! O nich nie ma w programie wzmianki – jakby to się nie zdarzyło.

SIMPLICIO: Czy nie za wiele wymagasz od nauczycieli? Nie dość, że każesz im indywidualnie zajmować się dziesiątkami uczniów jednocześnie, dbając o ich inspiracje, asystując im we własnych odkryciach i je prowokując, to jeszcze chcesz, żeby byli na bieżąco ze współczesną matematyką?

SALVIATI: Czy od nauczyciela malarstwa oczekujesz indywidualnych wskazań co do sposobu, w jaki malujesz? Czy oczekujesz znajomości ostatnich trzystu lat historii malarstwa? Poważnie mówiąc – niczego nie oczekuję, żal mi tylko, że nikt nawet za czymś takim nie tęskni.

SIMPLICIO: Więc winisz nauczycieli?

SALVIATI: Nie, winię kulturę, której są wytworem. Starają się jak mogą, a wszystko, co mogą, to powielać to wszystko, do czego ich samych wyćwiczono. Jestem pewny, że większość uwielbia swoich uczniów i jest im przykro z powodu tortur, które im zadają. W głębi duszy wiedzą, że to nie ma sensu i jest degradujące. Czują, że stali się trybami w okrutnej maszynie łamania dusz, ale brakuje im perspektywy, żeby to zrozumieć i z tym walczyć. Wiedzą tyle, że ich uczniowie mają być „przygotowani do następnej klasy".

SIMPLICIO: Naprawdę myślisz, że większość uczniów stać na taki poziom, który proponujesz, na uprawianie własnej matematyki?

SALVIATI: Gdybyśmy rzeczywiście uczciwie sądzili, że twórcze rozumowanie jest zbyt trudne dla uczniów, dlaczego oczekujemy równocześnie, że będą pisali opracowania historyczne, albo rozprawki o Szekspirze? Problem nie w uczniach, a w nauczycielach. Żaden z nich nigdy niczego nie dowiódł samodzielnie, jak zatem mają cokolwiek doradzać w tej kwestii uczniom? A każdym razie oczywiście okaże się, że istnieje całe zróżnicowanie w zdolnościach i zainteresowaniach uczniów, ale przynajmniej uczniowie będą mogli lubić albo nie lubić matematyki takiej, jaką ona naprawdę jest, a nie jedynie tej skarlałej karykatury, z jaką dzisiaj mamy do czynienia.

SIMPLICIO: Mimo wszystko oczekujemy jednak, żeby wszyscy uczniowie mieli pewien określony zakres podstawowych umiejętności i wiedzy. Program właśnie po to jest, by to zapewnić. I dlatego jest jednolity. Istnieją prawdy podstawowe i niezmienne: jeden i jeden zawsze będzie dwa, a suma kątów trójkąta wynosi 180 stopni. To nie są ani opinie ani mgliste odczucia artystyczne, tylko fakty.

SALVIATI: Dokładnie przeciwnie. Matematyczne struktury – użyteczne czy nie – zostały wynalezione i rozwinięte w kontekście problemów, których dotyczą. I czasem chcemy, żeby jeden plus jeden równało się zero, jak to się dzieje w arytmetyce modulo 2. A na powierzchni kuli suma kątów trójkąta jest większa od 180 stopni. Nie ma „faktów" *per se*. Wszystko zależy od kontekstu, jest względne. To kontekst i historia ma znaczenie – nie sam rezultat.

SIMPLICIO: Ta mistyczna paplanina zaczyna mnie męczyć. Podstawowa arytmetyka, ok? Zgadzasz się, czy się nie zgadzasz, że uczniowie mają się jej nauczyć?

SALVIATI: To bardzo zależy od tego, co przez to rozumiesz. Jeśli masz na myśli docenienie liczenia, porządkowania rzeczy, dostrzegania ogólniejszych zależności i ładu, odróżnienia samej rzeczy od jej reprezentacji, jakąś ideę historycznego rozwoju systemów liczbowych – wtedy tak. Myślę, że uczniom trzeba te rzeczy pokazać. Ale jeśli mówisz o prymitywnym zapamiętywaniu faktów bez zrozumienia czego dotyczą i dlaczego są faktami – wtedy nie. Jeśli myślisz o analizie wcale nieoczywistego faktu, że pięć grup po siedem to to samo, co siedem grup po pięć – tak. Jeśli chcesz zapamiętania, że $5 \times 7 = 7 \times 5$ – wtedy nie. Uprawianie matematyki powinno zawsze polegać na odkrywaniu harmonii, regularności i na znajdowaniu pięknych, pełnych znaczenia wyjaśnień.

SIMPLICIO: A geometria? Czyż tutaj uczniowie nie przeprowadzają dowodów? Czy geometria w gimnazjum nie jest doskonałym przykładem tego, czego oczekujesz od lekcji matematyki?

Geometria w gimnazjum: narzędzie Szatana

Nie ma nic bardziej irytującego dla autora zjadliwej krytyki, jak kiedy cel całego jadu, który z siebie wypuszcza oferuje mu się w charakterze poparcia jego tez. Nigdy wilk w owczej skórze nie jest tak podstępny, a fałszywy przyjaciel tak zdradziecki, jak to się zdarza z geometrią w gimnazjum. Ta geometria jest tak piekielnie niebezpieczna dokładnie dlatego, że rzeczywiście stanowi próbę wprowadzenia uczniów w sztukę argumentacji.

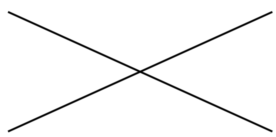
Na fałszywej arenie, na której uczniowie mają rzekomo brać się za bary z prawdziwą matematyką, podstępny wirus atakuje wprost samo serce matematyki, zatruwa uczniów, odbierając im radość, fascynację i piękno, raz na zawsze uniemożliwiając im myślenie naturalne i intuicyjne. Mechanizm jest subtelny i przebiegły. Uczeń-ofiara zostaje więc najpierw oszołomiony i sparaliżowany zmasowanym atakiem definicji, aksjomatów i notacji, a następnie w długim i bolesnym procesie stopniowo odstawiany od wszystkiego, czym karmi się naturalna ciekawość i intuicja, zalewany natomiast formalizmem sztucznego języka, sztucznych problemów i techniką przeprowadzania „formalnych dowodów geometrycznych".

Zostawmy na boku metafory, lekcje geometrii są bez wątpienia najbardziej umysłowo i emocjonalnie niszczycielskie z całego programu szkoły. Inne dziedziny mogą co prawda ukrywać pięknego ptaka, zamykać go w klatce, ale na lekcjach geometrii jawnie się go torturuje. (Jak widać, mimo wysiłków nie jestem w stanie obyć się bez metafor.)

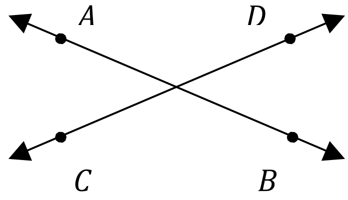
Istotą procesu jest systematyczna eliminacja intuicji. Dowód, matematyczna argumentacja, jest kawałkiem fikcji, jak wiersz. Jego celem jest *spełnienie*. Piękny dowód powinien wyjaśniać – powinien być zrozumiały, głęboki i elegancki. Dobrze skonstruowany i dobrze napisany dowód powinien smakować jak łyk źródlanej wody, być jak smuga światła – powinien ożywiać duszę i oświecać umysł. I powinien być *czarujący*.

W lekcjach geometrii nie ma niczego, co dałoby się uznać za czarujące. Uczniom prezentuje się zestaw sztywnych, dogmatycznych formuł, w które każdy tak zwany „dowód" musi zostać koniecznie ujęty. Format tak samo zbędny i głęboko nieodpowiedni, jak gdybyśmy żądali od dzieci chcących założyć ogród szczegółowej znajomości systematyki roślin, które chcą w nim zasadzić zamiast koloru kwiatów, które chciałyby w nim mieć.

Popatrzmy na kilka przykładów tego szaleństwa. Zacznijmy od dwóch krzyżujących się linii:



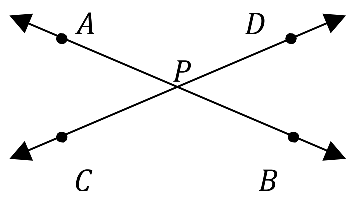
Pierwszą rzeczą, która zwykle dzieje się najpierw jest kompletne zmącenie skądinąd jasnego i przejrzystego problemu. Nie wolno więc mówić zwyczajnie o dwóch przecinających się liniach. Trzeba koniecznie nazwać je w skomplikowany sposób. Nie wystarczy zwykłe „prosta 1" i „prosta 2", nawet nie „a" i „b". Musimy koniecznie (w zgodzie z podręcznikami) wybrać na prostych przypadkowe punkty bez żadnego innego znaczenia poza potrzebą notacji, by potem odnosić się do prostych za pomocą specyficznej „notacji prostych”.



Widzimy, teraz nasze proste będą się nazywały *AB* i *CD*. I – Boże uchowaj! – nie dawać mi kresek nad literkami, ponieważ $\overline{AB}$ oznacza długość odcinka *AB* (przynajmniej wydaje mi się, że tak to jakoś działa). Nieważne jak bardzo i jak bez sensu jest to skomplikowane, tak właśnie każdy musi umieć to oznaczać. A teraz czas na właściwy problem, zwykle oznaczany jakąś absurdalną nazwą w rodzaju

TWIERDZENIE 2.1.1.

Niech *AB* i *CD* przecinają się w punkcie *P*.
Wówczas $\angle APC \cong \angle BPD$.



Innymi słowy, kąty po obu stronach są te same. Uff. Dwie krzyżujące się linie są symetryczne, na rany Ukrzyżowanego! Cóż, jakby tego wszystkiego było mało, ten oczywisty banał musi teraz zostać „dowiedziony”.

Dowód:

Teza	Argument
$m\angle APC + m\angle APD = 180$	Aksjomat sumy kątów
$m\angle BPD + m\angle DPA = 180$	
$m\angle APC + m\angle APD = m\angle BPD + m\angle DPA$	Własność równości
$m\angle APD = m\angle DPA$	Symetria równości
$m\angle APC = m\angle BPD$	Odejmowanie stron równości
$\angle APC \cong \angle BPD$	Aksjomat miary kątów

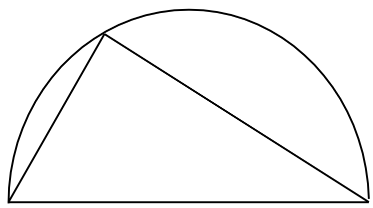
Zamiast więc sprytnej i fajnej argumentacji napisanej przez prawdziwą istotę ludzką w jednym z naturalnych i zrozumiałych języków, mamy tu tę oto ponurą, bezduszną, biurokratyczną formę nazwaną dowodem. I jak wielka góra urodziła tę nędzną mysz! Czy naprawdę tak banalna obserwacja wymaga wytaczania takich dział? Bądźmy uczciwi: czy w ogóle przeczytaliście ten dowód? Oczywiście, że nie. Kto normalny czytałby coś takiego?

Efektem elaboratów w tym rodzaju, pisanych na temat czegoś podobnie prostego, jest zwątpienie we własną intuicję. Kwestionowanie oczywistości w imię poprawności dowodu (jakby powyższe było rzeczywiście dowodem), to jakby powiedzieć uczniowi: „Twoje odczucia i pomysły są podejrzane. Musisz je wyrazić na nasz sposób."

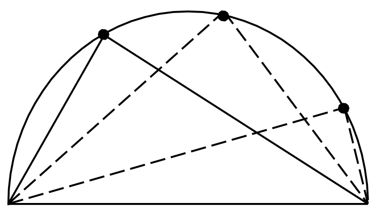
Bez wątpienia w matematyce jest miejsce na formalizmy, w dowodach oczywiście również. Ale nie od tego powinno się zaczynać wprowadzenie uczniów w matematyczne rozumowania. Przynajmniej spróbujmy najpierw zaznajomić ludzi z matematycznymi obiektami, pokażmy, czego się można po nich spodziewać, a ewentualnie potem zajmijmy się formalizmami. W matematycznej rzeczywistości rygorystycznie formalne dowody stają się ważne w kryzysowych sytuacjach – wtedy na przykład, kiedy odkrywamy, że nasze obiekty zachowują się sprzecznie z intuicją, kiedy napotykamy paradoks. Tego rodzaju higiena nie ma jednak tu zastosowania – przecież jeszcze nikomu od żadnego paradoksu nie zrobiło się niedobrze! Oczywiście, gdyby pojawiły się wątpliwości, powinny zostać starannie zbadane, ale to się przecież da zrobić również intuicyjnie. Istotą matematyki jest właśnie dialog prowadzony z wykorzystaniem własnych dowodów.

Nie tylko więc doprowadzamy dzieci do konfuzji tego typu pedanterią – nie ma nic bardziej złudnego niż dowód oczywistości – nawet te z nich, których intuicja pozostaje nienaruszona, muszą i tak przetłumaczyć własne idee na absurdalny język hieroglifów, żeby nauczyciel mógł je uznać za „poprawne". Nauczyciel zaś pochlebia sobie, myśląc, że oto wyostrza umysły uczniów.

Poważniejszy przykład – rozważmy trójkąt wewnątrz półokręgu:



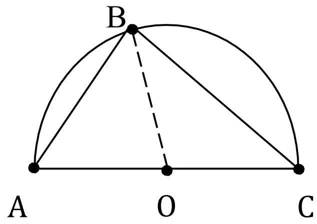
Piękna prawda o tym wzorze jest taka, że niezależnie od tego, gdzie na okręgu umieścić wierzchołek trójkąta, zawsze dostaniemy ładny i równy kąt prosty. (Nie mam nic przeciwko określeniu „kąt prosty", jeśli odpowiada ono zagadnieniu i czyni je łatwiejszym do omawiania. Nie przeciw samej terminologii tu protestuję – chodzi mi o terminologię bezsensowną. W każdym razie mogę z radością nazywać kąt „rogiem" albo choćby chlewem, jeśli uczeń ma na to ochotę.)



To jest przypadek, w którym intuicja nie wydaje się już tak pewna. Wcale nie jest jasne, że proponowana teza jest rzeczywiście prawdziwa, wydaje się nawet nieprawdopodobna – czyż kąt nie powinien się zmienić, jeśli przesuniemy wierzchołek? Mamy więc do czynienia z naprawdę fantastycznym problemem! Czy to jest prawda, że kąt jest zawsze prosty? A jeśli tak, to dlaczego? Oto szansa, by poćwiczyć pomysłowość i intuicję! I oczywiście ta szansa nie jest dana uczniom, których ewentualna ciekawość i zainteresowanie jest natychmiast zniesiona. Oto jak:

TWIERDZENIE 9.5. Niech ΔABC będzie wpisany w półokrąg o średnicy AC.

Wtedy $\angle ABC$ jest kątem prostym.



Dowód:

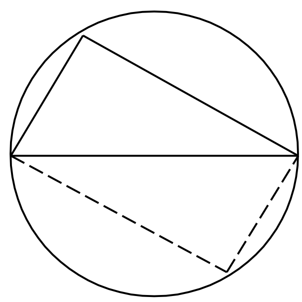
Teza	Argument
Wykreśl promień OB. Wówczas OB = OC.	Dane
m∠OBC = m∠BCA	Własności trójkąta równoramiennego
m∠OBA = m∠BAC	
m∠ABC = m∠OBA + m∠OBC	Własność sumy kątów
m∠ABC + m∠BCA + m∠BAC = 180	Suma kątów trójkąta wynosi 180
m∠ABC + m∠OBC + m∠OBA = 180	Podstawienie
2 m∠ABC = 180	Podstawienie
m∠ABC = 90	Dzielenie stronami
∠ABC jest kątem prostym	Definicja kąta prostego

Czy da się pomyśleć cokolwiek mniej atrakcyjnego i eleganckiego? Czy można przytoczyć mniej jasną argumentację? To nie jest matematyka! Dowód powinien być objawieniem bogów, a nie zaszyfrowaną wiadomością z Pentagonu. Oto do czego prowadzi źle pojęty logiczny rygor: *szpetota*. Duch rozumu pogrzebany pod stertą zaciemniającego wszystko formalizmu.

Żaden matematyk tak nie pracuje. Nigdy żaden tak nie pracował. To jest zupełne pomylenie idei matematycznego myślenia. Matematyka nie tworzy barier dla intuicji i nie komplikuje rzeczy prostych. Przeciwnie – matematyka znosi ograniczenia intuicji i czyni rzeczy prostymi.

Porównajmy ów niesmaczny dowód z takim oto rozumowaniem przedstawionym przez jednego z moich siódmoklasistów:

“Obróćmy trójkąt tak, żeby utworzył czworokąt w okręgu. Ponieważ trójkąt został dokładnie odwrócony, krawędzie czworokąta muszą być równoległe, więc czworokąt jest równoległobokiem. Ale to nie może być pochylony równoległobok, bo obie przekątne są średnicami okręgu, a więc muszą być równe. Co znaczy, że równoległobok jest prostokątem. Dlatego kąt jest zawsze prosty.”



Czy to nie jest zachwycające? Nie to jest najważniejsze, czy ten argument jest jako idea lepszy niż jakiś inny – chodzi o to, że idea w nim jest. (W rzeczywistości idea pierwszego dowodu jest całkiem niebrzydka, choć niestety ledwo widoczna spoza formalizmu.)

Co ważniejsze, to jest *własny* pomysł ucznia. Pojawił się problem, klasa głowiła się nad prawidłowościami, próbowała dowodów, a ten był jednym z zaproponowanych. Oczywiście zajęło to kilka dni i nastąpiło po całym szeregu frustrujących niepowodzeń.

Uczciwie mówiąc, nieco ten dowód przeredagowałem. Oryginał był nieco bardziej zawiły, zawierał trochę zbędnych określeń (a także błędów ortograficznych i gramatycznych). Ale myślę, że ideę zrozumiałem. Wady natomiast są właśnie zajęciem dla nauczyciela. Byłem w stanie wskazać różne problemy stylistyczne i logiczne, a uczeń potrafił wówczas ulepszyć swoją argumentację. Na przykład nie satysfakcjonował mnie w pełni fragment o przekątnych – ten argument nie wydawał mi się wcale tak oczywisty – co oznaczało tylko, że być może warto pomyśleć jeszcze chwilę i sytuację zrozumieć lepiej. W rzeczywistości uczeń potrafił poradzić sobie z tą luką całkiem ładnie:

> „Ponieważ trójkąt został obrócony o połowę okręgu, wierzchołek musiał się w efekcie znaleźć dokładnie naprzeciwko. Dlatego przekątna czworoboku jest średnicą okręgu."

A zatem świetny problem i piękny kawałek matematyki. Nie jestem pewien, kto był bardziej dumny: mój uczeń, czy ja. To jest w każdym razie ten rodzaj doświadczenia, które chcę dać uczniom.

Problemem standardowego programu geometrii jest to, że osobiste doświadczenie artysty zmagającego się z rozwiązaniem zostało zeń całkowicie wyeliminowane. Sztukę dowodzenia zastąpił system sztywnych algorytmów formalnej dedukcji krok po kroku. Podręcznik oferuje zbiór definicji, twierdzeń i dowodów – nauczyciel przepisuje je na tablicę, a uczniowie do zeszytów. Następnie prosi się ich, by powtarzali to wszystko w ćwiczeniach. Ci, którzy sprawnie wychwycą wzorzec postępowania, są „dobrymi uczniami".

W rezultacie uczeń zostaje biernym uczestnikiem twórczego aktu. Uczniowie formułują zdania wyłącznie po to, by je wpisać w przedstawiony im wzorzec, a nie dlatego, że *wyrażają nimi myśli*. Ćwiczy się ich w małpowaniu argumentów, a nie w wypowiadaniu zdań wyrażających ich myśli. Nie tylko więc nie mają pojęcia, o czym mówi nauczyciel – *nie mają pojęcia, o czym sami mówią*.

Kłamstwem są nawet definicje prezentowane w ten tradycyjny sposób. W wysiłku stworzenia wrażenia „przejrzystości" zanim skonfrontujemy się z typową kaskadą postulatów i dowodów, definicje oferuje się po to, by twierdzenia i dowody wypowiadać tak zwięźle, jak to jest tylko możliwe. Z wierzchu wygląda to całkiem niewinnie: skróty pozwolą mówić nieco bardziej ekonomicznie, dlaczego nie? Rzecz w tym, że *definicje nie są niewinne*: są wyrazem estetycznych decyzji o tym, które cechy uważasz za ważne jako artysta. *Definicje biorą się z problemów*. Zdefiniować coś znaczy zwrócić uwagę na cechy lub strukturę rozważanego obiektu. Historycznie rzecz biorąc definicje są skutkiem rozwiązywania problemu, a nie wstępem do niego.

Rzecz właśnie w tym, że prawdziwego rozumowania nie zaczyna się od definicji – ono się zaczyna od problemu. Nikomu nie przyszedł do głowy pomysł „niewymierności" zanim Pitagoras nie spróbował zmierzyć przekątnej kwadratu i nie zorientował się, że nie da się jej wyrazić ułamkiem. Definicje mają sens, kiedy w rozumowaniu dojdziesz do punktu, w którym rozróżnienia nabierają znaczenia. Definicje bez tego rodzaju motywacji raczej tylko *spowodują* zamieszanie.

To kolejny przykład izolowania uczniów od istoty matematycznego procesu. Uczniowie muszą być w stanie tworzyć własne definicje na miarę własnych potrzeb – by wyrazić przedmiot własnych dociekań. Nie chcę, żeby powtarzali: „definicja, twierdzenie, dowód", chcę, żeby mówili „moja definicja, moje twierdzenie, mój dowód".

Zostawiając na boku te zastrzeżenia, prawdziwym nieszczęściem jest to, że tego rodzaju lekcje są po prostu *nudne*. Wydajność i ekonomia nie tworzą dobrej pedagogii. Z najwyższym trudem wyobrażam sobie Euklidesa akceptującego tego rodzaju wykład, a jestem pewien, że Archimedes nie zaakceptowałby go za nic na świecie.

SIMPLICIO: Chwileczkę. Nie wiem jak ty, ale ja bardzo lubiłem zajęcia z geometrii. Podobały mi się struktury i ścisła postać dowodów.

SALVIATI: Wyobrażam sobie. Prawdopodobnie nawet zdarzało ci się pracować nad jakimiś naprawdę ładnymi problemami. Wielu ludzi lubi geometrię (choć o wiele więcej jej nie cierpi). Ale to wcale nie jest argument na rzecz dzisiejszej praktyki. To raczej wymowny przykład powabu samej matematyki. Trudno jest zniszczyć całkowicie coś tak pięknego: nawet ten żałosny cień matematyki potrafi wciąż zachwycać i angażować. Wielu ludzi lubi także malowanie liczbami: to relaksujące zajęcie, a w dodatku da się przy jego pomocy tworzyć rzeczy z kolorów. To jednak nie to samo, co malowanie.

SIMPLICIO: Ale powtarzam ci, mi się *podobało*.

SALVIATI: A gdybyś miał szansę na prawdziwe doświadczenie matematyki, podobałoby ci się nawet bardziej.

SIMPLICIO: Czy mamy wobec tego po prostu prowadzić luźne rozmowy matematyczne i liczyć, że uczniowie nauczą się czegoś przy okazji?

SALVIATI: Dokładnie. Problemy przyniosą kolejne problemy, techniki zostaną wprowadzone i rozwinięte, jeśli się okażą potrzebne, a nowe tematy pojawią się w sposób naturalny. A jeśli jakieś zagadnienie nie pojawi się wcale w ciągu trzynastu lat szkoły, to co w nim jest właściwie interesującego?

SIMPLICIO: Kompletnie oszalałeś.

SALVIATI: Możliwe. Ale nawet w ramach konwencjonalnej szkoły dobry nauczyciel może prowadzić dyskusję i tak prezentować problemy, by pozwolić uczniom na własne odkrywanie i wymyślanie własnej matematyki. Realny problem jest taki, że na tego rodzaju swobodę nie pozwala indywidualnemu nauczycielowi biurokracja. Mając ustalony program, nauczyciel nie może być przewodnikiem. Standardy nie powinny istnieć, nie powinno się ustalać programu. Nauczyciele indywidualnie powinni określać, co im się wydaje najlepsze.

SIMPLICIO: Ależ jak w takiej sytuacji zagwarantować, że każda szkoła zapewni ten sam podstawowy zakres wiedzy? Jak porównywać wyniki uczniów?

SALVIATI: Nie da się i nie powinniśmy tego robić. Jak w prawdziwym życiu. Czas zaakceptować fakt, że ludzie są po prostu różni. Nie ma zresztą po co tego robić. Ktoś kończy gimnazjum znając wzory na połówki kątów (kto je zresztą zna?) I co z tego? Przynajmniej ludzie będą zdolni od czasu do czasu samodzielnie wpaść na jakiś pomysł, zrozumieć, o czym naprawdę mówi to lub inne zagadnienie i dostrzec w nim coś wartościowego.

Na zakończenie

Aby dopełnić dzieła krytyki standardowego programu matematyki i aby przysłużyć się szkolnej wspólnocie, prezentuję niniejszym pierwszy *całkowicie uczciwy* katalog szkolnego programu matematyki:

STANDARDOWY PROGRAM MATEMATYKI DLA SZKÓŁ

NAUCZANIE POCZĄTKOWE. Początek indoktrynacji. Uczniowie dowiadują się, że matematyka to nie coś, co robisz, ale coś, co inni robią tobie. Nacisk kładzie się na siedzeniu w bezruchu, wypełnianiu kart pracy i wykonywaniu poleceń. Od dzieci wymagamy opanowania złożonego zestawu algorytmów manipulowania chińskimi znakami bez związku z czymkolwiek, co je interesuje i co zaledwie kilka stuleci temu uznawano za zbyt trudne dla przeciętnego dorosłego. Nacisk kładziemy na tabliczkę mnożenia, naciskowi poddajemy rodziców, nauczycieli i samych uczniów.

KLASY IV – VI. Uczniów wdraża się w postrzeganie matematyki jako zestawu procedur, pokrewnych religijnym obrzędom i podobnie jak one na wieki wykutych w kamieniu. Pojawiają się święte tablice albo „Księgi Matematyczne", a uczniowie przyzwyczajają się myśleć o starszych Kościoła w trzeciej osobie: „Czego oni tutaj oczekują? Czy oni chcą, żebym to podzielił?" Wymyślne i sztuczne „zadania tekstowe" zostają wprowadzone, by bezmyślna męka arytmetyki stała się relatywnie znośniejsza. Uczniowie będą systematycznie testowani na okoliczność znajomości całkowicie zbędnych technicznych określeń, takich jak „liczba całkowita" lub „ułamek właściwy". Znakomite przygotowanie dla Algebry I.

ALBEGRA I. Tak zatem, by nie tracić cennego czasu na jałowe rozważania liczb i ich regularności, lekcje algebry koncentrują się zamiast tego na symbolach i zasadach manipulowania nimi. Znika nieprzerwana opowieść od problemów zapisanych na starożytnych tabliczkach z Mezopotamii po zaawansowaną sztukę matematyków Odrodzenia – zastępuje się ją męcząco fragmentaryczną, post-modernistyczną opowieścią bez bohaterów, bez wątków i bez tematu. Nacisk, by liczbom i wyrażeniom nadawać te same standardowe formy, prowadzi do dodatkowego pomieszania znaczeń identyczności i równości. Uczniowie muszą ponadto z jakichś powodów opanować wzór równania kwadratowego.

GEOMETRIA. Całkowicie oddzielony od całej reszty programu ten osobny przedmiot obudzi nadzieje tych uczniów, którzy chcieliby jeszcze jakimś cudem zaangażować się we własną intelektualną aktywność – i te nadzieje stłumi. Niejasna i zniechęcająca notacja zostanie wprowadzona i żaden ból nikomu nie zostanie oszczędzony, by proste uczynić niejasnym. Celem tego kursu jest wymazać wszelkie możliwe pozostałości matematycznej intuicji – w przygotowaniu do Algebry II.

ALGEBRA II. Tematem jest tu nieuzasadnione i nieprawidłowe użycie kartezjańskiej geometrii. Przekroje stożkowe zostają tu wprowadzone w układzie współrzędnych, by zatrzeć ślad po estetycznej prostocie stożków i ich przekrojów. Uczniowie nauczą się przepisywania równań kwadratowych w rozmaitości standardowych formatów – bez żadnego celu ani przyczyny. Wprowadzone zostaną również funkcje wykładnicze i logarytmiczne – nie są co prawda obiektami algebraicznymi, ale gdzieś je upchnąć trzeba. Nazwa kursu ma utrwalać mit drabiny. Dlaczego Geometria tkwi pomiędzy Algebrą I i jej kontynuacją – pozostaje zagadką.

TRYGONOMETRIA. Program na dwa tygodnie rozciągnięto na cały semestr wypełniony masturbacyjnymi praktykami powtarzającymi wciąż te same proste operacje. Zjawiska naprawdę interesujące i piękne, jak choćby to, że i w jaki sposób boki trójkąta zależą od jego kątów, zasłużą na co najwyżej tyle uwagi, co pozbawione znaczenia skróty i konwencje notacji – wszystko po to, by zapobiec zrozumieniu, o czym w ogóle jest trygonometria. Uczniowie poznają zestaw mnemotechnicznych protez w rodzaju „w pierwszej ćwiartce same plusy, w drugiej tylko sinus…", co będzie odtąd zastępowało im orientację i poczucie symetrii. Miary trójkątów zostaną przedstawione bez słowa o transcendentalnej naturze funkcji trygonometrycznych, ani o językowych i filozoficznych problemach, które się w nich ujawniają. Kalkulator jest niezbędny – by tylko liczyć i jeszcze dodatkowo zaciemnić zrozumienie.

WSTĘP DO ANALIZY. Bezsensowna zupa tematów bez związku. Głównie niedokończona próba wprowadzenia metod pochodzących z końca dziewiętnastego wieku do zagadnień, w których ani one nie są niezbędne, ani do niczego niepotrzebne. Techniczne definicje granic i ciągłości wprowadza się, by właśnie przysłonić skądinąd intuicyjnie jasne pojęcie ciągłej i gładkiej zmiany. Jak to pokazuje nazwa, kurs przygotowuje uczniów do Analizy, w której wszelkie naturalne pojęcia kształtu i ruchu zostaną ostatecznie doprowadzone do całkowitego niezrozumienia.

ANALIZA. Kurs dotyczy matematyki ruchu i polega na zagrzebaniu jasnych pojęć z tym związanych pod stosem reguł formalnych. Chociaż kurs jest wstępem do rachunku różniczkowego i całkowego, proste i fundamentalne idee Newtona i Leibniza odrzucimy, by zastąpić je bardziej złożonym podejściem analizy funkcji, które rozwinięto, by poradzić sobie z najróżniejszymi trudnościami zupełnie innej natury, niemającymi związku z tematem i oczywiście niewyjaśnionymi. Kurs zostanie słowo w słowo powtórzony na studiach.

* * *

I oto ona: szkolna matematyka. Doskonała recepta na rozbrojenie młodych umysłów – skuteczny i sprawdzony lek na ciekawość. Oto, co szkoła robi z matematyką!

A takie zapierające dech w piersiach piękno tkwi w tej starożytnej sztuce. Co za ironia – ludzie odrzucają matematykę jako antytezę kreatywności. Umyka im sztuka starsza niż jakakolwiek książka, głębsza niż jakikolwiek wiersz i bardziej abstrakcyjna niż cokolwiek. I to właśnie *szkoła* to sprawia! Jaki beznadziejny, niekończący się cykl, w którym nieświadomi zła nauczyciele wyrządzają go tyle nieświadomym uczniom. A moglibyśmy mieć tyle zabawy.

SIMPLICIO: Dobra, jestem kompletnie załamany. Co teraz?
SALVIATI: Cóż, chyba mam pomysł na tę piramidę zamkniętą w kostkę…

Tłumaczenie
Paweł Kasprzak
Fundacja OFF

Przekład nieautoryzowany. Oryginał dostępny jako wolny zasób:
https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf